रोल नं0
Roll No. ☐☐☐☐☐☐☐☐

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 6
No. of printed pages : 6

128

428 (IAX)

2014
गणित
MATHEMATICS

समय : 3 घण्टे]
Time : 3 hours]

[पूर्णांक : 100
[Max. Marks : 100

निर्देश : (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं, जो तीन भागों 'अ' 'ब' तथा 'स' में विभक्त हैं। भाग–'अ' में 10 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है, भाग–'ब' में 12 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है तथा भाग–'स' में 7 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है।

(iii) भाग–'अ' के प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक शब्द या एक वाक्य या आवश्यकतानुसार ही दें।

(iv) प्रश्नपत्र में कोई समग्र व्यापक विकल्प नहीं है, तथापि 4 अंकों वाले चार प्रश्नों तथा 6 अंकों वाले दो प्रश्नों के आंतरिक विकल्प दिये गये हैं। ऐसे विकल्प वाले प्रश्नों के केवल एक विकल्प का ही उत्तर दीजिए।

(v) कैलकुलेटर का प्रयोग वर्जित है। यदि आवश्यक हो तो, लघुगणक तालिका का प्रयोग किया जा सकता है।

(vi) प्रथम प्रश्न से प्रारम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए, जो प्रश्न न आता हो उस पर समय नष्ट न कीजिए।

Note : (i) All questions are compulsory.

(ii) The paper consists of 29 questions divided into three Sections 'A', 'B' and 'C'. Section-'A' contains 10 questions of 1 mark each; Section 'B' contains 12 questions of 4 marks each and Section-'C' contains 7 questions of 6 marks each.

(iii) All questions in Section-'A' are to be answered in one word or one sentence or as per the exact requirements of the questions.

(iv) There is no overall choice. However, internal choices have been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions..

(v) Use of calculator is not permitted. Logarithmic tables may be used, if required.

(vi) Start from the first question and proceed to the last. Do not waste time over a question, if you can not solve it.

भाग – 'अ'
(SECTION – 'A')

1. दिखाइए कि समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)\}$ द्वारा प्रदत्त संबंध स्वतुल्य है। 1
Show that the relation R in the set $\{1, 2, 3\}$ given by $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,3)\}$ is reflexive.

2. सिद्ध कीजिए, $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1, 1]$ 1
Prove that,

3. X तथा Y ज्ञात कीजिए यदि, $X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ 1

Find X and Y if, $X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ and $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. आव्यूह $\begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ का परिवर्त आव्यूह ज्ञात कीजिए। 1

Find the transpose of the matrix $\begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$.

5. यदि $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ तो x के मान ज्ञात कीजिए। 1

Find values of x if, $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

6. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ का प्रतिअवकलज ज्ञात कीजिए। 1

Find antiderivative of $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

7. $\int_0^{\pi/4} sec^2 x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

Evaluate $\int_0^{\pi/4} sec^2 x\, dx$

8. $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ के अनुदिश एक ऐसा सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 5 इकाई है। 1

Find a vector in the direction of vector $\vec{a} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ that has magnitude 5 units.

9. $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k}) + \hat{j}.(\hat{i}\times\hat{k}) + \hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

Find the value of $\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k}) + \hat{j}.(\hat{i}\times\hat{k}) + \hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})$.

10. यदि एक रेखा x, y तथा z- अक्षों की धनात्मक दिशा के साथ क्रमशः 90^0, 60^0 तथा 30^0 के कोण बनाती है तो इसकी दिक्–कोज्यायें ज्ञात कीजिए। 1

If a line makes angle 90^0, 60^0 and 30^0 with the positive direction of x, y and z– axis respectively. Find its direction cosines.

भाग – 'ब'

(SECTION – 'B')

11. $f(x) = \sin x$ द्वारा प्रदत्त फलन $f:[0, \pi/_2] \to R$ तथा $g(x) = \cos x$ द्वारा प्रदत्त फलन $g:[0, \pi/_2] \to R$ पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि f तथा g एकैकी है, परन्तु $f + g$ एकैकी नहीं हैं। 4

Consider a function $f:[0, \pi/_2] \to R$ given by $f(x) = \sin x$ and $g:[0, \pi/_2] \to R$ given by $g(x) = \cos x$. Show that f and g are one-one, but $f + g$ is not one-one.

अथवा (OR)

निर्धारित कीजिए कि समुच्चय N में प्रदत्त निम्नलिखित द्विआधारी संक्रियाओं में से कौन सी साहचर्य है और कौन सी क्रमविनिमेय हैं।

Determine which of the following binary operations on the set N are associative and which are commutative.

(a) $a * b = 1, \ \forall a, b \in N$

(b) $a * b = \frac{(a+b)}{2}, \ \forall a, b \in N$

12. $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$ को सरल कीजिए। 4

Solve, $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$.

13. यदि x, y, z विभिन्न हों, और $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$, तो दर्शाइए कि $1 + xyz = 0$ 4

If x, y, z are different and $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$, then show that $1 + xyz = 0$.

अथवा (OR)

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, then verify that $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

14. माध्यमान प्रमेय को लिखिए और अंतराल [2, 4] में फलन $f(x) = x^2$ के लिए इसे सत्यापित कीजिए। 4

Write Mean Value Theorem and verify it for the function $f(x) = x^2$ in the interval [2, 4].

15. यदि $\cos y = x \cos(a + y)$ तथा $\cos a \neq \pm 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$ 4

If $\cos y = x \cos(a + y)$ and $\cos a \neq \pm 1$, Prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

16. वक्र $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$ के बिन्दु (1, 1) पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए। 4

Find the equations of the tangent and normal to the curve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2$ at point (1, 1).

अथवा (OR)

अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = x^2 - 4x + 6$ से प्रदत्त फलन f

(a) निरंतर वर्धमान है

(b) निरंतर ह्रासमान है

Find the intervals in which the function f given by $f(x) = x^2 - 4x + 6$ is

(a) Strictly increasing

(b) Strictly decreasing

17. फलन $\frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए। 4

Integrate the function $\frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ with respect to x.

18. अवकल समीकरण $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \ (x \neq 0)$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 4

Find the general solution of the differential equation $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \ (x \neq 0)$

19. अवकल समीकरण को हल कीजिए : $x \frac{dy}{dx} = x + y$ 4
Solve the differential equation :

20. सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ में से प्रत्येक के लंबवत मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$ हैं। 4

Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{a} - \vec{b})$, where $\vec{a} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$.

21. रेखाएँ, जिनके सदिश समीकरण $\vec{r} = (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k})$ और $\vec{r} = (4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k})$ हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 4
Find the shortest distance between the lines whose vector equations are $\vec{r} = (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k})$ and $\vec{r} = (4\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k})$.

22. एक बक्से में दस कार्ड 1 से 10 तक पूर्णांक लिखकर रखे गये हैं और उन्हें अच्छी तरह मिलाया गया। इस बक्से से एक कार्ड यादृच्छया निकाला गया। यदि यह ज्ञात हो कि निकाले गए कार्ड पर संख्या 3 से अधिक है, तो इस संख्या के सम होने की प्रायिकता क्या है ? 4
Ten cards numbered 1 to 10 are placed in a box, mixed up thoroughly and then one card is drawn randomly. If it is known that the number on the drawn card is more than 3, what is the probability that it is an even number ?

अथवा (OR)

एक पासे को एक बार उछाला जाता है। घटना 'पासे पर प्राप्त संख्या 3 का अपवर्त्य है', को E से और 'पासे पर प्राप्त संख्या सम है', को F से निरुपित किया जाए तो घटनाओं E और F के स्वातंत्र्य का परीक्षण कीजिए।
A dice is thrown. If E is the event 'the number appearing is a multiple of 3' and F be the event 'the number appearing is even' then check the independence of the events E and F.

भाग – 'स'

(SECTION – 'C')

23. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ है तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। A^{-1} का प्रयोग करके निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए – 6

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5Z &= 11 \\ 3x + 2y - 4Z &= -5 \\ x + y - 2Z &= -3 \end{aligned}$$

If matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, find A^{-1}. Using A^{-1} solve the following system of equations –

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5Z &= 11 \\ 3x + 2y - 4Z &= -5 \\ x + y - 2Z &= -3 \end{aligned}$$

24. $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x+x^2}}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 6

Evaluate, $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x+x^2}}\,dx$.

25. सिद्ध कीजिए कि वक्र $y^2 = 4x$ एवं $x^2 = 4y$, रेखाओं $x = 0, x = 4, y = 4$ एवं $y = 0$ से घिरे वर्ग के क्षेत्रफल को तीन बराबर भागों में विभाजित करते हैं। 6

Prove that the curves $y^2 = 4x$ and $x^2 = 4y$, divide the area of the square bounded by $x = 0$, $x = 4, y = 4$ and $y = 0$ into three equal parts.

26. सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के गोले के अन्तर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ है। अधिकतम आयतन भी ज्ञात कीजिए। 6

Show that the height of the cylinder of greatest volume which can be inscribed in a sphere of radius R is $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Also find the maximum volume.

27. उस तल का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दु (1, −1, 2) अंतर्विष्ट है और जो समतलों $2x + 3y - 2z = 5$ और $x + 2y - 3z = 8$ में से प्रत्येक पर लंब है। 6

Find the equation of the plane that contains the point (1, −1, 2) and is perpendicular to each of the planes $2x + 3y - 2z = 5$ and $x + 2y - 3z = 8$.

अथवा (OR)

उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिन्दुओं A (3, 4, 1) और B (5, 1, 6) को मिलाने वाली रेखा XY- तल को काटती है।

Find the coordinates of the point where the line through the points A (3, 4, 1) and B (5, 1, 6) crosses the XY- plane.

28. दो थैले I और II दिए हैं। थैले I में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं जबकि थैले II में 5 लाल और 6 काली गेंदें हैं। किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गई है जो कि लाल रंग की है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद थैले II से निकाली गई है ? 6

Bag I contains 3 red and 4 black balls while another bag II contains 5 red and 6 black balls. One ball is drawn at random from one of the bags and it is found to be red. Find the probability that it was drawn from bag II.

अथवा (OR)

पासों के एक जोड़े को तीन बार उछालने पर द्विकों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

Find the probability distribution of number of doublets in three throws of a pair of dice.

29. आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को दिए गये व्यवरोधों के अन्तर्गत हल कीजिए –

$$x + 2y \geq 10$$
$$3x + 4y \leq 24$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

$Z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 6

Solve the following linear programming problem graphically –

Minimise $Z = 200x + 500y$

Subject to the constraints :

$$x + 2y \geq 10$$
$$3x + 4y \leq 24$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

******