रोल नं.
Roll No. ☐☐☐☐☐☐☐☐

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 6
No. of printed pages : 6

128

428 (IAX)

2016

गणित

MATHEMATICS

समय : 3 घण्टे]
Time : 3 hours]

[पूर्णांक : 100
[Max. Marks : 100

निर्देश : (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं, जो तीन भागों 'अ', 'ब' तथा 'स' में विभक्त हैं। भाग 'अ' में 10 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। भाग 'ब' में 12 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है तथा भाग 'स' में 7 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है।

(iii) भाग 'अ' के प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक शब्द या एक वाक्य या आवश्यकतानुसार ही दें।

(iv) प्रश्न पत्र में कोई समग्र व्यापक विकल्प नहीं है, तथापि 4 अंकों वाले चार प्रश्नों तथा 6 अंकों वाले दो प्रश्नों के आंतरिक विकल्प दिये गये हैं। ऐसे विकल्प वाले प्रश्नों के केवल एक विकल्प का ही उत्तर दीजिए।

(v) कैलकुलेटर का प्रयोग वर्जित है। यदि आवश्यक हो तो लघुगणक तालिका का प्रयोग किया जा सकता है।

(vi) प्रथम प्रश्न से प्रारम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए। जो प्रश्न न आता हो उस पर समय नष्ट न कीजिए।

Note : (i) All questions are compulsory.

(ii) This paper consists of 29 questions divided into three sections 'A', 'B' and 'C'. Section 'A' contains 10 questions of 1 mark each, section 'B' contains 12 questions of 4 marks each and section 'C' contains 7 questions of 6 marks each.

(iii) All questions in section 'A' are to be answered in one word or one sentence or as per the exact requirements of the questions.

(iv) There is no overall choice. However, internal choices have been provided in 4 questions of four marks each and in 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.

(v) Use of calculator is not permitted. Logarithmic table may be used, if required.

(vi) Start from the first question and proceed to the last. Do not waste time over a question, if you can not solve it.

भाग – 'अ'

(SECTION – 'A')

1. क्या $f(n) = n^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f : N \to N$, आच्छादक है ? 1
Whether the function $f : N \to N$, defined by $f(n) = n^2$ is onto ?

2. $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ का मान लिखिये, जहाँ $x \in [-1, 1]$. 1
Write down the value of $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$, where $x \in [-1, 1]$.

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ तो A' ज्ञात कीजिए। 1
If $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, then find A'.

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ तो AI_2 का मान ज्ञात कीजिए। 1
If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, then find the value of AI_2.

5. सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ में अवयव 3 का उपसारणिक ज्ञात कीजिए। 1
In the determinant $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$, find the minor of the element 3.

6. फलन $x \sin x^2$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए। 1
Integrate the function $x \sin x^2$ with respect to x.

7. मान ज्ञात कीजिए : $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$. 1
Evaluate :

8. सदिश $\bar{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। 1
Find the unit vector along the vector $\bar{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$.

9. यादे $\bar{a} = 2\hat{i} + 3\hat{k}$ और $\bar{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j}$ तो $\bar{a} \times \bar{b}$ का मान ज्ञात कीजिए। 1
If $\bar{a} = 2\hat{i} + 3\hat{k}$ and $\bar{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j}$, then evaluate $\bar{a} \times \bar{b}$.

10. दो बिन्दुओं (3, 1, –1) तथा (2, 0, –2) से जाने वाली रेखा की दिक्–कोज्याएँ ज्ञात कीजिए। 1

Find the direction-cosines of a line passing through two points (3, 1, –1) and (2, 0, –2).

भाग – 'ब'
(SECTION – 'B')

11. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में $R = \{(a, b) : a \le b\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R का इसकी तुल्यता के लिए परीक्षण कीजिए। 4

Examine for its equivalence, the relation R defined by $R = \{(a, b) : a \le b\}$ in the set of real numbers.

अथवा (OR)

यदि $f : R \to R$ तथा $g : R \to R$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x$ तथा $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित हैं तो gof और fog ज्ञात कीजिये। सिद्ध कीजिये $gof \neq fog$.

Find gof and fog, if $f : R \to R$ and $g : R \to R$ are given by $f(x) = \cos x$ and $g(x) = 3x^2$. Show that $gof \neq fog$.

12. सिद्ध कीजिए :
Prove that : $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ 4

13. सिद्ध कीजिए :
Prove that : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ 4

14. बिंदु $x = 1$ पर फलन $f(x) = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \le 1 \\ 3, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ के सांतत्य का परीक्षण कीजिए। 4

Examine the function $f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \le 1 \\ 3, & \text{if } x > 1 \end{cases}$ for its continuity at the point $x = 1$.

अथवा (OR)

यदि $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ है तो सिद्ध कीजिये कि $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$.

If $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$, prove that $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$.

15. अंतराल [1, 4] में फलन $f(x) = x^2 - 4x - 3$ के लिए माध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए। 4

Verify the mean value theorem for the function $f(x) = x^2 - 4x - 3$ in the interval [1, 4].

16. परवलय $y^2 = 4ax$ के बिंदु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए। 4

Find the equations of tangent and normal at the point $(at^2, 2at)$ on the parabola $y^2 = 4ax$.

17. फलन $x\,(\log x)^2$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए। 4

Integrate the function $x\,(\log x)^2$ with respect to x.

अथवा (OR)

योगफल की सीमा के रूप में $\int_1^2 x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int_1^2 x\,dx$ as the limit of a sum.

18. अवकल समीकरण $e^x \tan y\,dx + (1 - e^x)\sec^2 y\,dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 4

Find the general solution of the differential equation $e^x \tan y\,dx + (1 - e^x)\sec^2 y\,dy = 0$.

19. अवकल समीकरण $x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \log x$ को हल कीजिए। 4

Solve the differential equation $x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \log x$.

20. दो सदिशों $\bar{a}$ तथा $\bar{b}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि : 4

$|\bar{a} + \bar{b}| \le |\bar{a}| + |\bar{b}|$

For two vectors $\bar{a}$ and $\bar{b}$, prove that :

$|\bar{a} + \bar{b}| \le |\bar{a}| + |\bar{b}|$.

21. निम्नांकित रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$\bar{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ तथा $\bar{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

Find the shortest distance between the following lines :

$\bar{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$ and $\bar{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k})$

अथवा (OR)

समतलों $x + y + z = 1$ और $2x + 3y + 4z = 5$ के प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले तथा समत
$x - y + z = 0$ पर लम्बवत तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the plane through the line of intersection of the planes $x + y + z = 1$ a
$2x + 3y + 4z = 5$ which is perpendicular to the plane $x - y + z = 0$.

22. एक थैले में 5 सफेद, 7 लाल तथा 4 काली गेंदें हैं। इसमें से यादृच्छया 3 गेंदें निकाली जाती हैं। इन सभी के सफेद होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 4

A bag contains 5 white, 7 red and 4 black balls. From this bag, 3 balls are drawn at random. Find the probability of these being all white.

भाग – 'स'

(SECTION – 'C')

23. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ के लिए $A(\text{adj } A) = |A| I$ को सत्यापित कीजिए और A^{-1} ज्ञात कीजिए। 6

For the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, verify $A(\text{adj } A) = |A| I$ and hence determine A^{-1}.

24. एक 28 सेमी लम्बे तार को दो भागों में विभक्त किया जाता है। एक भाग से वर्ग तथा दूसरे भाग से वृत्त बनाया जाता है। इन भागों की लंबाई कितनी होनी चाहिए ताकि वर्ग एवं वृत्त का सम्मिलित क्षेत्रफल न्यूनतम हो ? 6

A 28 cm long wire is to be cut into two parts. From these parts, a square and a circle are to be formed. What should be the lengths of these parts so that the composite area of the square and the circle is minimum ?

अथवा (OR)

अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x) = \sin 3x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (i) वर्धमान है (ii) ह्रासमान है।

Determine the interval in which the function $f(x) = \sin 3x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ is (i) increasing (ii) decreasing.

25. मान ज्ञात कीजिए : 6

Evaluate : $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$

26. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2 + y^2 = 16$, रेखा $y = x$ एवं y-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 6

Find the area bounded in first quadrant, by the circle $x^2 + y^2 = 16$, the line $y = x$ and the y-axis.

27. एक समतल, अक्षों पर a, b, c अंतःखण्ड काटता है तथा इसकी मूल बिंदु से दूरी p है। सिद्ध कीजिए : 6

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$$

A plane makes intercepts a , b , c on the axis and its distance from origin is p. Prove that :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$$

28. एक लड़के द्वारा एक परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता $\frac{3}{5}$ है तथा दूसरे लड़के द्वारा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता $\frac{2}{5}$ है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इनमें से कम से कम एक द्वारा यह परीक्षा उत्तीर्ण की जाती है। 6

The probability that a boy passes an examination is $\frac{3}{5}$ and the probability that another boy passes it, is $\frac{2}{5}$. Find the probability that at least one of them passes this examination.

अथवा (OR)

ताश के 52 पत्तों की एक सुमिश्रित गड्डी से दो पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के साथ निकाले जाते हैं। इक्कों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

Two cards are drawn successively after replacement from a well shuffled pack of 52 playing cards. Find the probability distribution of number of aces.

29. आलेखीय विधि से निम्नांकित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए : 6

निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 5x + 3y$ का अधिकतमीकरण कीजिए –

$3x + 5y \le 15$

$5x + 2y \le 10$

$x \ge 0, y \ge 0$

Solve the following linear programming problem graphically :

Maximize $Z = 5x + 3y$

Subject to the constraints –

$3x + 5y \le 15$

$5x + 2y \le 10$

$x \ge 0, y \ge 0$

****