

--	--	--	--	--	--	--	--

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 6
No. of printed pages : 6

428 (ICX)

2017

गणित

MATHEMATICS

3 घण्टे]
3 hours]

[पूर्णांक : 100
[Max. Marks : 100

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (ii) इस प्रश्न पत्र में 29 प्रश्न हैं, जो तीन भागों 'अ', 'ब' तथा 'स' में विभक्त हैं। भाग 'अ' में 10 प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है। भाग 'ब' में 12 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है तथा भाग 'स' में 7 प्रश्न हैं जिनमें प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है।
- (iii) भाग 'अ' के प्रत्येक प्रश्न का उत्तर एक शब्द या एक वाक्य या आवश्यकतानुसार ही दें।
- (iv) प्रश्न पत्र में कोई समग्र व्यापक विकल्प नहीं है, तथापि 4 अंकों वाले चार प्रश्नों तथा 6 अंकों वाले दो प्रश्नों के आंतरिक विकल्प दिये गये हैं। ऐसे विकल्प वाले प्रश्नों के केवल एक विकल्प का ही उत्तर दीजिए।
- (v) कैलकुलेटर का प्रयोग वर्जित है। यदि आवश्यक हो तो लघुगणक तालिका का प्रयोग किया जा सकता है।
- (vi) प्रथम प्रश्न से प्रारम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए। जो प्रश्न न आता हो उस पर समय नष्ट न कीजिए।
- (i) All questions are compulsory.
- (ii) This paper consists of 29 questions divided into three sections 'A', 'B' and 'C'. Section 'A' contains 10 questions of 1 mark each, section 'B' contains 12 questions of 4 marks each and section 'C' contains 7 questions of 6 marks each.
- (iii) All questions in section 'A' are to be answered in one word or one sentence or as per the exact requirements of the questions.
- (iv) There is no overall choice. However, internal choices have been provided in 4 questions of four marks each and in 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.
- (v) Use of calculator is not permitted. Logarithmic table may be used, if required.
- (vi) Start from the first question and proceed to the last. Do not waste time over a question, if you can not solve it.

[1]

[P.T.O.

भाग - 'अ'
(SECTION - 'A')

1. धनात्मक परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q^+ में परिभाषित द्विआधारी संक्रिया $*$ के लिए, जहाँ $a * b = \frac{ab}{2} \forall a, b \in Q^+$, तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए।

Find the identity element for the binary operation $*$ defined in the set Q^+ of positive rational numbers,

by $a * b = \frac{ab}{2} \forall a, b \in Q^+$.

2. यदि $x \in R$ तो $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x$ का मान लिखिये।
If $x \in R$ then write down the value of $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x$.

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, तो AB ज्ञात कीजिए।

If $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, then find AB .

4. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ में अवयव 6 का सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

Find the cofactor of the element 6 in the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$.

5. यदि $\begin{vmatrix} \lambda^2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4$, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

If $\begin{vmatrix} \lambda^2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4$, find the value of λ .

6. फलन $\frac{\sin(\tan^{-1} x)}{1+x^2}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

Integrate the function $\frac{\sin(\tan^{-1} x)}{1+x^2}$ with respect to x .

7. मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^1 x e^{x^2} dx$
Evaluate :

यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तो $|\vec{a}|$ का मान ज्ञात कीजिए।

1

If $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, then evaluate $|\vec{a}|$.

यदि $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, तो $\vec{a} \times \vec{b}$ ज्ञात कीजिए।

1

If $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, then find $\vec{a} \times \vec{b}$.

समतल $x + 2y + 3z = 6$ द्वारा निर्देशांक-अक्षों पर काटे गये अंतःखण्डों की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

1

Find the length of intercepts made by the plane $x + 2y + 3z = 6$ on co-ordinate axis.

भाग - 'ब'
(SECTION - 'B')

सिद्ध कीजिए कि फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ जो $f(x) = \cos x$; $\forall x \in \mathbb{R}$ द्वारा परिभाषित है, न एकैकी है और न आच्छादक।

4

Prove that the function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x) = \cos x$; $\forall x \in \mathbb{R}$ is neither one-one nor onto.

अथवा (OR)

मान लीजिए कि $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$, $f(x) = 4x + 3$ द्वारा परिभाषित एक फलन है, जहाँ $Y = \{y \in \mathbb{N} : y = 4x + 3$ किसी $x \in \mathbb{N}$ के लिए}। सिद्ध कीजिए कि f व्युत्क्रमणीय है। प्रतिलोम फलन भी ज्ञात कीजिए।

Let $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$, $f(x) = 4x + 3$, be a function defined as $f(x) = 4x + 3$; where $Y = \{y \in \mathbb{N} : y = 4x + 3$ for some $x \in \mathbb{N}\}$. Show that f is invertible. Find the inverse.

सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 - \sin x}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$, जहाँ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

4

Prove that $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1 - \sin x}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$, where $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

सारणिक $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4

Evaluate the determinant $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$.

फलन $f(x) = |x|$ का $x = 0$ पर सांतत्य के लिए परीक्षण कीजिए।

4

Examine the function $f(x) = |x|$ for continuity at $x = 0$.

अथवा (OR)

3 (ICX)

[3]

[P.T.O.]

यदि $x = a \left(\cos \theta + \log \tan \frac{\theta}{2} \right)$, $y = a \sin \theta$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

If $x = a \left(\cos \theta + \log \tan \frac{\theta}{2} \right)$, $y = a \sin \theta$, then find $\frac{dy}{dx}$.

15. माध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए, यदि अन्तराल $[a, b]$ में $f(x) = x^2$, जहाँ $a = 2$ और $b = 4$ है। 4
Verify mean value theorem. if $f(x) = x^2$ in the interval $[a, b]$, where $a = 2$ and $b = 4$.

16. वक्र $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ के बिंदु $(3, 0)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। 4

Find the equation of tangent to the curve $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ at the point $(3, 0)$.

अथवा (OR)

वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन $f(x) = 2x^2 - 3x$, (a) निरंतर वर्धमान है (b) निरंतर हासमान है।
Find the interval in which the function $f(x) = 2x^2 - 3x$ is (a) strictly increasing (b) strictly decreasing.

17. मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{dx}{(x+1)(x+3)}$ 4
Evaluate :

18. अवकल समीकरण $\sec^2 x \tan y \, dx + \sec^2 y \tan x \, dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 4
Find the general solution of the differential equation $\sec^2 x \tan y \, dx + \sec^2 y \tan x \, dy = 0$.

19. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया हुआ है कि $y = 0$ यदि $x = \frac{\pi}{3}$ । 4

Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x$, given that $y = 0$ if $x = \frac{\pi}{3}$.

20. सदिशों $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 4
Find the angle between the vectors $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$.

21. बिंदुओं $(1, 2, 3)$ तथा $(2, 3, 5)$ से जाने वाली रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए। 4
Find the cartesian equation of the line passing through the point $(1, 2, 3)$ and $(2, 3, 5)$.

अथवा (OR)

समतलों, जिनके सदिश समीकरण $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 5$ और $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = 3$ हैं, के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

Find the angle between the planes whose vector equations are $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 5$ and $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = 3$.

एक पासे को दो बार उछाला गया और प्रकट हुई संख्याओं का योग 6 पाया गया। संख्या 4 के न्यूनतम एक बार प्रकट होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 4

A dice is tossed twice and the sum of the numbers appeared is found to be 6. Find the conditional probability of the number 4 appearing at least once.

भाग — 'स'

(SECTION — 'C')

प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग से निम्नांकित आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए : 6

Find the inverse of the following matrix by using elementary operations :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

सिद्ध कीजिए कि प्रदत्त सम्पूर्ण पृष्ठ एवं महत्तम आयतन के बेलन की ऊँचाई, आधार के व्यास के बराबर होती है। 6

Show that for a right circular cylinder of given total surface and maximum volume, the height is equal to the diameter of the base.

सिद्ध कीजिए कि : 6

Prove that : $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{1 + \sin x} = \pi$

वक्र $x = y^2$ एवं रेखा $x = 4$ से घिरा हुआ क्षेत्रफल रेखा $x = a$ द्वारा दो बराबर भागों में विभाजित होता है।

समाकलन विधि का प्रयोग कर a का मान ज्ञात कीजिए। 6

The area between curve $x = y^2$ and the line $x = 4$ is divided in two equal parts by the line $x = a$. Using the method of integration, find the value of a .

अथवा (OR)

परवलय $4ay = x^2$ और इसके नाभिलंब से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Find the area bounded by the parabola $4ay = x^2$ and its latus rectum.

बिंदु $(1, 2, -4)$ से जाने वाली और रेखाओं $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ और $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$ में से

किसी एक पर लम्ब रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए। 6

Find the cartesian equation of the line passing through $(1, 2, -4)$ and perpendicular to each of the

lines $\frac{x-8}{3} = \frac{y+19}{-16} = \frac{z-10}{7}$ and $\frac{x-15}{3} = \frac{y-29}{8} = \frac{z-5}{-5}$.

(X)

[5]

[P.T.O.]

28. यदि E और F स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि E या F में से न्यूनतम एक के घटने की प्रायिकता $1 - P(E)P(F)$ है। 6

If E and F are two independent events, then prove that the probability of the occurrence of at least one of E and F is $1 - P(E)P(F)$.

अथवा (OR)

एक मनुष्य के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है। पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

It is known about a man that he speaks truth 3 out of 4 times. He tosses a dice and tells that the number appearing on the dice is 6. Find the probability that the number appearing on the dice is actually 6.

29. आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए – 6

निम्न अवरोधों के अंतर्गत $Z = 3x + 5y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए –

$$x + 3y \geq 3$$

$$x + y \geq 2$$

$$x, y \geq 0$$

Solve the following linear programming problem graphically –

$$\text{Minimize } Z = 3x + 5y$$

Subject to the constraints –

$$x + 3y \geq 3$$

$$x + y \geq 2$$

$$x, y \geq 0$$
