

अनुक्रमांक—

Roll No-

प्रतिदर्श प्रश्नपत्र

2023

गणित

MATHEMATICS

समय: 3 घण्टे

पूर्णांक: 80

Time: 3 hours

Max Marks: 80

निर्देश: (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। इस प्रश्नपत्र में कुल 26 प्रश्न हैं।

(ii) प्रश्न संख्या 1 बहुविकल्पीय है जो 8 (आठ) खण्डों में विभक्त है। प्रत्येक खण्ड एक अंक का है। प्रत्येक खण्ड के उत्तर में चार विकल्प दिये गये हैं। सही विकल्प अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिये।

(iii) प्रश्न संख्या 2 से 9 तक प्रत्येक प्रश्न एक अंक का है। प्रश्न संख्या 10 से 14 तक प्रत्येक प्रश्न दो अंकों का है। प्रश्न संख्या 15 से 20 तक प्रत्येक प्रश्न चार अंकों का है तथा प्रश्न संख्या 21 से 26 तक प्रत्येक प्रश्न पाँच अंकों का है।

(iv) प्रश्न पत्र में समग्र पर कोई विकल्प नहीं है, तथापि कुछ प्रश्नों में आंतरिक विकल्प प्रदान किये गये हैं। ऐसे प्रश्नों के केवल एक विकल्प का ही उत्तर दीजिए।

(v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

Note: (i) All questions are compulsory. There are 26 questions in this question paper.

(ii) Question No. 1 is multiple choice question divided into 8 (eight) parts. Each part carry one mark. Four options are given in each part of question. Write the correct option in your answer book.

(iii) Question No 2 to 9 carry one mark each. Question No 10 to 14 carry two marks each Question No 15 to 20 carry four marks each and Question No 21 to 26 carry five marks each.

(iv) There is no overall choice in question paper, however, in some questions internal choices is provided. You have to attempt only one of the given choices in such questions.

(v) Use of calculator is not permitted

(vi) दो सदिशों \vec{a} तथा \vec{b} के बीच का कोण, जिनके परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ तथा 4 हैं एवं $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{3}$ 1

The angle between two vectors \vec{a} and \vec{b} with magnitudes $\sqrt{3}$ and 4 respectively and $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{3}$ will be -

- a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{5\pi}{2}$

(vii) समतल $2x-3y+4z-6=0$ की मूल बिन्दु से दूरी है- 1

Distance of plane $2x-3y+4z-6=0$ from the origin is-

- a) $\frac{6}{\sqrt{29}}$ b) 6 c) $\sqrt{29}$ d) 3

(viii) यदि पासों का एक जोड़ा उछाला जाता है जो प्रत्येक पासे पर सम अभाज्य संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता है : 1

The probability of obtaining an even prime number on each die, when a pair of dice rolled, is :

- a) 0 b) $1/3$ c) $1/12$ d) $1/36$

2) क्या फलन $f(x)=x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ आच्छादक है। 1

Whether the function $f:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, defined by $f(x)=x^2$ is onto ?

3) सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ में अवयव 3 का उपसारणिक ज्ञात कीजिए। 1

In the determinant $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ find the minor of element 3.

4) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ का x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए । 1

Find the derivative of $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ with respect to x .

5) $x=2$, पर वक्र $y = x^3 - x$ की स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए । 1

Find the slope of tangent of curve $y = x^3 - x$, at $x=2$.

6) $\int_0^2 e^x dx$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

Evaluate $\int_0^2 e^x dx$.

7) फलन $\frac{(\log x)^2}{x}$ का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए । 1

Integrate function $\frac{(\log x)^2}{x}$ with respect to x .

8) यदि $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ हो तो $|\vec{A}|$ का मान ज्ञात कीजिए । 1

If $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ then find the value of $|\vec{A}|$

9) एक रेखा के दिक्-अनुपात $-2, 2, 1$ हैं। इसकी दिक् कोज्याएं ज्ञात कीजिए । 1

Direction ratios of a line are $-2, 2, 1$, find its direction cosines.

10) यदि $\sin(\sin^{-1} \frac{1}{5} + \cos^{-1} x) = 1$, तो x का मान ज्ञात कीजिए । 2

If $\sin(\sin^{-1} \frac{1}{5} + \cos^{-1} x) = 1$, then find the value of x .

11) एक घन का आयतन 9 सेमी³ /सेकण्ड की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर की लम्बाई 5 सेमी है तो इसका कोर किस दर से परिवर्तित हो रहा है । 2

The volume of a Cube is increasing at a rate of $9 \text{ cm}^3/\text{sec}$. How fast is the side of cube changing when the length of an edge is 5 cm .

अथवा (OR)

दिखाइए कि प्रदत्त फलन f , $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$, $X \in \mathbb{R}$, \mathbb{R} पर वर्धमान फलन है।

Show that the function f given by, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$, $X \in R$ is increasing on R .

- 12) समतल $x+2y+3z = 6$ द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्तःखण्डों की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

2

Find the intercepts cut off by the plane $x+2y+3z = 6$ on the axes.

अथवा (OR)

x – अक्ष का कार्तीय समीकरण त्रिविमीय रूप में ज्ञात कीजिए।

Find the Cartesian equation of x -axis in 3-dimensional form.

- 13) फलन $\frac{1}{(x+2)(x+3)}$ का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए।

2

Find the integration of the function $\frac{1}{(x+2)(x+3)}$ with respect to x .

- 14) एक विशेष प्रश्न को A और B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि प्रश्न हल हो जाता है।

2

Probability of solving a specific problem independently by A and B are $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$ respectively. If both try to solve the problem independently. Find the probability that the problem is solved.

- 15) एक ही तल में स्थित समस्त सीधी रेखाओं के समुच्चय L में संबंध R , $R = \{ (L_1, L_2) : L_1, L_2 \text{ के समान्तर है } \}$ द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि R एक तुल्यता संबंध है।

4

In a set L of all straight lines lying in a single plane, a relation R is defined by $R = \{(L_1, L_2) : L_1 \text{ is parallel to } L_2\}$. Prove that R is an equivalence relation.

अथवा (OR)

धनात्मक परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q में $a * b = \frac{ab}{2}$ द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया $*$ के लिए तत्समक अवयव एवं प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

4

Find identity element and inverse of a binary operation $*$ on the set Q of positive rational numbers defined as $a*b = \frac{ab}{2}$.

- 16) प्रारंभिक रूपान्तरण द्वारा आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। 4

Find the inverse of matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ by the elementary operations

- 17) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$ की सातत्यता की जांच कीजिए। 4

Examine the continuity of the function $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$

- 18) $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x+x^2}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

Evaluate $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x+x^2}} dx$.

अथवा (OR)

- $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

Evaluate $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}} dx$.

- 19) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ मात्रक सदिश इस प्रकार हैं कि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ तो $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are unit vectors such that $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ then find the value of $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$

- 20) रेखाओं $\frac{x+3}{-4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{2}$ एवं $\frac{x+2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{1}$ के मध्य उभयनिष्ठ लम्ब की लम्बाई एवं समीकरण ज्ञात कीजिए। 4

Find the equation and length of common normal between the lines $\frac{x+3}{-4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{2}$

and $\frac{x+2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{1}$.

अथवा (OR)

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-3,1,2)$ से गुजरता है तथा समतलों $x+2y+3z=5$ और $3x+3y+z=0$ में से प्रत्येक पर लम्ब है ।

Find the equation of the plane passing through the point $(-3,1,2)$ and is perpendicular to each plane $x+2y+3z=5$ and $3x+3y+z=0$.

21) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए । A^{-1} का प्रयोग करके समीकरण

निकाय $2x-3y+5z=-11$, $3x+2y-4z=-5$, $x+y-2z=-3$ को हल कीजिए । 6

If matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, Find A^{-1}

Using A^{-1} solve the system of equations $2x-3y+5z=-11$, $3x+2y-4z=-5$, $x+y-2z=-3$.

22. सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अन्तर्गत महत्तम वक्रपृष्ठ वाले लम्बवृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है । 6

Prove that the radius of the right circular cylinder of greatest curved surface area which can be inscribed in a given cone is half of that of the cone.

अथवा (OR)

सिद्ध कीजिए कि वक्र $x=y^2$ और $xy=k$ एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं यदि $8k^2=1$

Prove that the curves $x=y^2$ and $xy=k$ cut at right angles if $8k^2=1$.

23. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ का हल ज्ञात कीजिए । 6

Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$.

अथवा (OR)

दर्शाइए कि अवकल समीकरण $(x^2-y^2)dx+(2xy)dy=0$ समघातीय है और इसे हल कीजिए ।

Show that the differential equation $(x^2-y^2)dx+(2xy)dy=0$ is homogeneous and solve it.

24. परवलय $y^2=4ax$ एवं रेखा $y=mx$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 6

Find the area bounded by the parabola $y^2=4ax$ and the line $y=mx$

25. आलेखीय विधि से निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को दिए गये व्यवरोधों के अन्तर्गत हल कीजिए एवं $z=200x+500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए । 6

$$x+2y \geq 10,$$

$$3x+4y \leq 24,$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Solve the following linear programming problem graphically and find the minimum value of $z=200x+500y$

Subject to the constraints-

$$x+2y \geq 10,$$

$$3x+4y \leq 24,$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

26. पासों के एक जोड़े को तीन बार उछालने पर द्विकों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए । 6
Find the probability distribution of number of doublets in three throws of a pair of dice.

अथवा (OR)

एक व्यक्ति द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है । एक सिक्का उछाला जाता है और यह व्यक्ति बताता है कि चित प्रकट हुआ है। वास्तव में चित प्रकट होने की प्रायिकता क्या है ?

The probability that a person speaks truth is $\frac{4}{5}$. A coin is tossed and this person tells that the head has appeared. What is the probability that the head has actually appeared?