

गणित
कक्षा-12

समय : 3 घण्टे
Time : 3 hours

पूर्णांक : 100
Max. Marks : 100

सामान्य निर्देश-

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल 29 प्रश्न हैं, जिन्हे तीन भागों A, B, C में विभक्त किया गया है। भाग A में 10 प्रश्न हैं, जो कि प्रत्येक एक अंक का है, भाग B में 12 प्रश्न हैं, जो कि प्रत्येक 4 अंक का है, तथा भाग C में 7 प्रश्न हैं, जो कि प्रत्येक 6 अंक का है।
- (iii) भाग A के प्रत्येक भाग का उत्तर एक शब्द या एक वाक्य या आवश्यकतानुसार ही दें।
- (iv) सम्पूर्ण प्रश्न-पत्र में प्रश्नों के विकल्प नहीं दिये गये हैं, परन्तु 4 अंकों के चार प्रश्नों तथा 6 अंकों के दो प्रश्नों के आन्तरिक विकल्प दिये गये हैं, ऐसे प्रश्नों के केवल एक विकल्प का ही उत्तर दिया जाना है।
- (v) कैल्कुलेटर का प्रयोग वर्जित है। लघुगुणक तालिका का प्रयोग किया जा सकता है।
- (vi) प्रथम प्रश्न से प्रारम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए। जो प्रश्न न आता हो उस पर समय नष्ट न कीजिये।

भाग - A

1. यदि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - x^3)^{1/3}$ द्वारा प्रदत्त है तो $f \circ f(x)$ का मान बताओ।
2. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ है तो AB का मान ज्ञात कीजिए।
3. $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का मान बताइये।
4. यदि $f(x) = \cos x$ तथा $g(x) = 3x^2$ तो $g \circ f$ तथा $f \circ g$ का मान ज्ञात कीजिए।
5. सारणिक $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।
6. $\int (4e^{3x} + 1) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।
7. यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j}$ तथा $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j}$ तो सिद्ध करो $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
8. एक समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी समीपवर्ती भुजाओं के सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ है
9. यदि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 0$ तो $P(A/B)$ का मान बताओ।
10. यदि $x = a(\cos t + t \sin t)$ और $y = a(\sin t - t \cos t)$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए।

11. यदि $f(x) = \frac{3X+4}{5X-7}$ द्वारा परिभाषित फलन $f: R - \left\{\frac{7}{5}\right\} \rightarrow R - \left\{\frac{3}{5}\right\}$ तथा
 $g(x) = \frac{7X+4}{5X-3}$ द्वारा परिभाषित फलन $g: R - \left\{\frac{3}{5}\right\} \rightarrow R - \left\{\frac{7}{5}\right\}$ प्रदत्त है

तो सिद्ध कीजिए कि $f \circ g = I_A$ तथा $g \circ f = I_B$ इस प्रकार कि $I_A(x) = x \quad \forall x \in A$ और $I_B(x) = x, \quad \forall x \in B$ जहाँ
 $A = R - \left\{\frac{3}{5}\right\}$, $B = R - \left\{\frac{7}{5}\right\}$ है, I_A तथा I_B को क्रमशः समुच्चय A तथा B पर तत्समक (Identity)
 फलन कहते हैं।

अथवा

ज्ञात कीजिए कि क्या निम्न सम्बन्ध क्रमविनिमेय एवं साहचर्य नियम का पालन करते हैं,

(I) $a * b = \frac{a+b}{2}$, $\forall a, b \in N$ जहाँ N परिमेय संख्याओं का समुच्चय है।

(II) $a * b = 1$, $\forall a, b \in Q$ जहाँ प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है।

12. $\tan^{-1} \left[\frac{\cos x}{1-\sin x} \right]$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ को सरलतम रूप में व्यक्त करो।

13. यदि $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $2A+3X=5B$ तो आत्यूह X ज्ञात कीजिए।

अथवा

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$$

14. f के सभी असांतत्य के बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए, जबकि f निम्न प्रकार परिभाषित है :-

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 2 \\ 2x-3, & x > 2 \end{cases}$$

15. यदि $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ तो सिद्ध करो कि :-

$$\frac{dy}{dx} = -3\sqrt{\frac{y}{x}}$$

अथवा

$$\frac{dy}{dx} \text{ का मान ज्ञात कीजिए यदि } y = x^{\sin x}$$

16. मान ज्ञात कीजिए

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

17. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

18. योगफल की सीमा के रूप में निम्न समाकलन का मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^4 (x + e^{2x}) dx$$

19. मान ज्ञात कीजिए।

$$\int \frac{3x}{1+2x^4} dx$$

20. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ज्ञात कीजिए

21. बिन्दु (1,2,3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ के समान्तर है।

22. 52 ताशों की गड्डी से एक पत्ता खो जाता है, शेष पत्तों से दो पत्ते निकाले जाते हैं, जो ईट के पत्ते हैं, खो गये पत्ते की ईट होने की प्राथमिकता क्या है?

अथवा

एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है, वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है, इस की प्राथमिकता ज्ञात कीजिए कि पासे में आने वाली संख्या वास्तव में 6 है।

23. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ है तो दर्शाइये कि $A^3 - 23A - 40I = 0$

भाग - C

24. अन्तराल $[1,5]$ में $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ द्वारा प्रदत्त फलन के निरपेक्ष उच्चतम और निम्नतम मानों को ज्ञात कीजिए।

अथवा

100cm^3 आयतन वाले डिब्बे सभी बन्द बेलनाकार (लम्ब वृत्तीय) डिब्बों में से न्यूनतम पृष्ठ क्षेत्रफल वाले डिब्बे की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

25. फलन $f(x) = x^2 + 2x - 8$, $x \in [-4,2]$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

26. अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f निरन्तर वर्धमान या निरन्तर हासमान है।

27. उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए, जो मूल बिन्दु से 7 मात्रक दूरी पर है, और सदिश $3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ पर अभिलम्ब है।

28. एक अनभिन्नत पासे को फेंकने पर प्राप्त संख्याओं का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

अथवा

वस्तुओं के एक ढेर में 5% त्रुटिपूर्ण वस्तुएँ हैं। इसकी क्या प्राथमिकता है कि 10 वस्तुओं के एक प्रतिदर्श में एक से अधिक त्रुटिपूर्ण वस्तुएँ नहीं होंगी ?

29. एक निर्माणकर्ता कम्पनी एक उत्पाद के दो नमूने (प्रतिमान) A व B बनाती है, नमूना A के प्रत्येक नग बनाने के लिए 9 श्रम घंटे और 1 घंटा पालिश करने के लिए लगता है, जबकि नमूना B के प्रत्येक नग बनाने में 12 श्रम घंटे और 3 घंटे पॉलिश करने के लिए लगते हैं। बनाने तथा पालिश करने के लिए उपलब्ध अधिकतम श्रम घंटे क्रमशः 180 तथा 30 हैं। कम्पनी नमूना A के प्रत्येक नग पर रुपया 8000 तथा नमूना B के प्रत्येक नग पर रुपया 12000 का लाभ कमाती है। नमूना A और नमूना B के कितने नगों का अधिकतम लाभ कमाने के लिए प्रति सप्ताह निर्माण करना चाहिए? प्रति सप्ताह अधिकतम लाभ क्या है?